

AVRCo002

GLS lösen mit dem AVRCo

Einleitung:

Eine zentrale Aufgabenstellung der Numerischen Mathematik ist das Lösen Linearer Gleichungssysteme. In dieser Application Note wird ein einfaches Prinzip zum Lösen von einem GLS vorgestellt.

Theorie:

Auch heute gibt es keine einfachere und bessere Methode zum Lösen Linearer Gleichungssysteme (GLS) als den guten alten Gauss-Algorithmus. Wie Sie dem Programm entnehmen können, lässt sich das Verfahren in zwei Hauptzyklen unterteilen:

- Ø Elimination
- Ø Rücksubstitution

Aufgrund der drei ineinander verschachtelten Schleifen verbraucht der Eliminationszyklus die meiste Rechenzeit. Schritt für Schritt wird eine Unbekannte nach der anderen eliminiert, bis schließlich das Gleichungssystem auf eine Restmatrix der Ordnung 1 zusammengerschrumpft ist und der Wert für X1 ermittelt werden kann.

Die Rücksubstitution nutzt die bereits berechneten X-Werte, um sie schrittweise in das nächsthöhere Zwischengleichungssystem einzusetzen, aus welchem dann ein weiteres X ermitteln lässt. Dabei wird die rechte Seite des GLS mit dem gefundenen X-Werten überschrieben, so dass für die Lösung kein extra Speicherplatz erforderlich ist.

Kritisch ist die Division durch das Hauptdiagonalelement des GLS. Eingabe_Matrix[1,1] darf nicht Null sein, da sonst der Algorithmus unweigerlich „abstürzt“, die kann man durch ein sortieren der Reihenfolge vermeiden.

Praktische Anwendung und warum das Ganze im AVRCo:

Das Problem aus der Industrieproduktion:

In Industrieunternehmen herrschen häufig zwischen Roh-, Zwischen – und Fertigprodukten Zusammenhänge. Für unser Beispiel nehmen wir an, daß das Zwischenprodukt Z zu 70% aus dem Rohprodukt X1, zu 20% aus dem Rohprodukt X2 und zu 10% aus dem Fertigprodukt F besteht. Vom Zwischenprodukt Z fallen 80% als Fertigprodukt F an. (Der angegebene Fall, dass ein Rückfluss von Produkten höherer Produktionsstufe zu Produkten niedriger Produktionsstufe vorliegt, tritt z.B. häufig in der Chemischen Industrie auf.) Soll etwa eine Mengeneinheit (ME) des Fertigproduktes F produziert werden, so wird man nach den benötigten ME der Rohprodukte X1, X2 fragen müssen.

Dies führt in folgender Weise auf ein lineares Gleichungssystem:

Die Anzahl der ME des Fertigproduktes, die in die Produktion zurückfließen sei X3, die Anzahl der erzeugten ME des Fertigproduktes sei X4.

Um einen Überschuss von 1ME des Fertigproduktes zu erzielen, muss offenbar gelten:

$$X4 - X3 = 1$$

Die Prozentanteile der Rohprodukte bzw. des rückfließenden Fertigprodukts ergeben:

$$X1/X2 = 7/2 \quad \text{und} \quad X2/X3 = 2/1$$

Da aus dem Zwischenprodukt 80% ME als Fertigprodukt anfallen, gilt:

$$X4 = 0,8 (X1+X2+X3)$$

Nach entsprechendem Umformen ergibt sich ein lineares Gleichungssystem mit folgendem Lösungsschema:

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 1 & -1 & & 1 \\ 2 & -7 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & & 0 \\ 0,8 & 0,8 & ,08 & -1 & & 0 \end{array}$$

Dies führt auf die Lösung $X_1 = 1$, $X_2 = 2/7$, $X_3 = 1/7$, $X_4 = 8/7$.

Viel Spaß beim spielen!!